FSC5123. Experimento 11. Anexo.

Relação entre índice de refração e ângulo de desvio mínimo no prisma

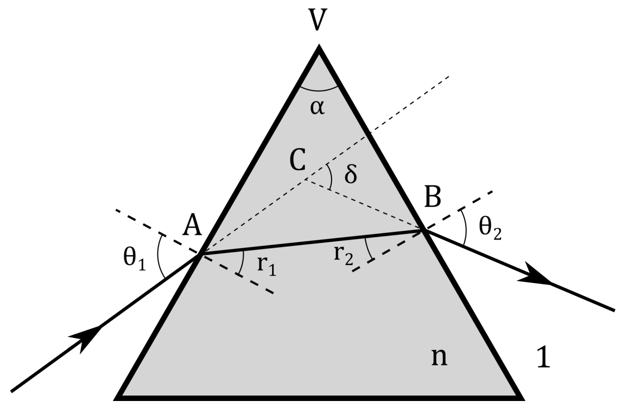

Figura 1: α é o ângulo formado pelo prisma em seu vértice V, θ_1 e θ_2 são os ângulos entre o raio luminoso e as normais de cada superfície na entrada e na saída externamente ao prisma, r_1 e r_2 são os ângulos entre o raio luminoso e as normais de cada superfície na entrada e na saída internamente ao prisma, δ é ***o ângulo de desvio*** do raio luminoso provocado pelo prisma.

A figura acima representa o raio de luz atravessando um prisma isósceles e sendo desviada, graças à diferença de índice de refração entre o ar e o material que constitui o prisma. Abaixo, seguem quatro equações obtidas a partir da figura:

$$\triangle\text{ABC}: \quad (\pi - \delta) + (\theta_1 - r_1) + (\theta_2 - r_2) = \pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta = \theta_1 + \theta_2 + \alpha} \tag{1}$$

$$\triangle\text{ABV}: \quad \alpha + \left(\tfrac{\pi}{2} - r_1\right) + \left(\tfrac{\pi}{2} - r_2\right) = \pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = r_1 + r_2} \tag{2}$$

$$\text{ponto A}: \quad \boxed{\operatorname{sen}\theta_1 = n \operatorname{sen} r_1} \tag{3}$$

$$\text{ponto B}: \quad \boxed{\operatorname{sen}\theta_2 = n \operatorname{sen} r_2} \tag{4}$$

As duas primeiras, vêm do fato de que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180° ou π radianos. As duas últimas são aplicações diretas da lei de Snell aos pontos A e B.

O objetivo é utilizar estas equações para mostrar que o ângulo de desvio δ é mínimo quando $\theta_1 = \theta_2$, ou seja, quando os ângulos de incidência e de saída são iguais. O desvio é mínimo quando a derivada de δ em relação a θ_1 é nula. Por isso, vamos derivar as quatro equações acima em relação a θ_1 e analisar o caso em que $d\delta/d\theta_1 = 0$.

$$(1) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta_2}{d\theta_1} = -1 \quad \text{(desvio mínimo)} \tag{5}$$

$$(2) \quad \Rightarrow \quad \frac{dr_1}{d\theta_1} = -\frac{dr_2}{d\theta_1} \tag{6}$$

$$(3) \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_1 = n\cos r_1 \frac{dr_1}{d\theta_1} \tag{7}$$

$$(4) \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_2 \frac{d\theta_2}{d\theta_1} = n\cos r_2 \frac{dr_2}{d\theta_1} \tag{8}$$

Ao substituir as duas primeiras equações nas duas últimas, obtemos duas equações em que apenas a derivada de r_2 aparece. Basta então dividir uma equação pela outra para encontrar uma expressão simples relacionando os cossenos dos ângulos θ_1, θ_2, r_1 e r_2:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\theta_1 = -n\cos r_1 \ dr_2/d\theta_1 \\ \cos\theta_2 = -n\cos r_2 \ dr_2/d\theta_1 \end{array} \right. \Rightarrow \cos\theta_1 \cos r_2 = \cos\theta_2 \cos r_1 \tag{9}$$

Usando as equações (3) e (4), podemos expressar os ângulos r_1 e r_2 em termos de θ_1 e θ_2, respectivamente, reescrevendo a equação (9), o que dá:

$$\begin{aligned} \left(1-\operatorname{sen}^2\theta_1\right)\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2\theta_2}{n^2}\right) &= \left(1-\operatorname{sen}^2\theta_2\right)\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2\theta_1}{n^2}\right) \\ \operatorname{sen}^2\theta_1 &= \operatorname{sen}^2\theta_2 \Rightarrow \boxed{\theta_1 = \theta_2}, \end{aligned} \tag{10}$$

ou seja, quando o ângulo de desvio é mínimo, θ_1 e θ_2 são iguais. Note que usou-se o fato de que θ_1 e θ_2 são ângulos compreendidos entre 0° e 90°.

Similarmente, é fácil mostrar a partir da equação (9) que os ângulos internos r_1 e r_2 também são iguais. Desta maneira, o trajeto do raio de luz no interior do prisma é paralelo à sua base. Assim, na condição de desvio mínimo,

$$\boxed{\theta_1 = \theta_2 = \theta} \quad \text{e} \quad \boxed{r_1 = r_2 = r}. \tag{11}$$

Nesta condição, as equações (1) a (4) viram as três abaixo, donde se obtém a expressão do índice de refração do prisma em termos, somente, do ângulo α formado em seu vértice e do ***ângulo de desvio mínimo*** D:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2r \\ D = 2\theta - \alpha \\ \operatorname{sen}\theta = n \operatorname{sen} r \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{D+\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}}. \tag{12}$$