

# Exp. 7

## Ressonância num circuito RLC

FSC5143 - Laboratório de Física III  
FSC5123 - Física experimental II

lemo.ufsc.br  
Versão de 2 de setembro de 2019

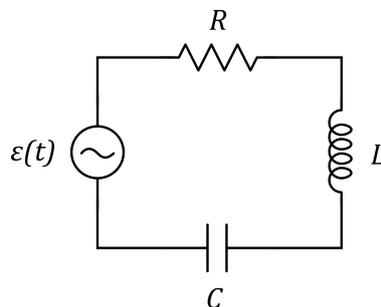
### 1 Objetivos

- Medir correntes e tensões em circuitos RC, RL, LC e RLC montados em série e alimentados por tensão alternada;
- Construir diagrama de tensões do circuito RLC;
- Observar o fenômeno de ressonância num circuito RLC e medir sua frequência de ressonância.

### 2 Teoria Básica

A ressonância é um fenômeno que permeia diversas áreas da Física e tem fundamental importância, tanto do ponto de vista didático quanto do ponto de vista de aplicações práticas, que vão desde as construções civil, naval e espacial até a concepção de dispositivos que trabalham na escala atômica.

Neste experimento, observaremos a ressonância elétrica num circuito RLC, aquele composto por uma associação em série de resistor ( $R$ ), um indutor ( $L$ ) e um capacitor ( $C$ ), alimentada por uma fonte de tensão e corrente alternadas. A frequência angular  $\omega$  da fonte pode ser escolhida pelo utilizador. O circuito é mostrado na Figura 1.



**Figura 1** Circuito RLC alimentado por uma fonte de tensão de alternada:  $\varepsilon(t) = V_m \cos(\omega t)$ , onde  $\omega = 2\pi f$  é a frequência angular da fonte,  $f$  é a frequência da fonte e  $V_m$  sua tensão máxima.

## 2.1 Dinâmica do circuito RLC

Na experiência em que estudamos a carga e a descarga de um capacitor, vimos que, enquanto a tensão num resistor ôhmico é diretamente proporcional à corrente que o percorre, a tensão no capacitor é diretamente proporcional à carga acumulada nas suas placas. Aqui, introduzimos um novo elemento, o indutor, que é composto por uma bobina. Quando uma bobina é percorrida por uma corrente, forma-se um campo magnético em seu interior apontando na direção do seu eixo e estabelecendo um fluxo de campo magnético através da bobina. Se a corrente na bobina é variada, ocorre variação do fluxo magnético através da bobina. De acordo com a Lei de Lenz, a variação do fluxo, por sua vez, *induz* uma força eletromotriz nas espiras da bobina: daí o nome *indutor*. De fato, a tensão entre os terminais de um indutor é proporcional à *taxa de variação da corrente* que o percorre, ou seja, a  $di/dt$ . A constante de proporcionalidade entre a tensão e a derivada temporal da corrente recebe o nome de indutância ( $L$ ). Sua unidade no SI é o henry (H).

Componente	Propriedade	Unidade (SI)	Tensão
Capacitor	capacitância ( $C$ )	farad (F)	$V_C = \frac{1}{C} q$
Resistor	resistência ( $R$ )	ohm ( $\Omega$ )	$V_R = R \frac{dq}{dt} = Ri$
Indutor	indutância ( $L$ )	henry (H)	$V_L = L \frac{d^2q}{dt^2} = L \frac{di}{dt}$

**Tabela 1** A tensão em cada um dos componentes do circuito RLC, expressa em termos da carga acumulada no capacitor,  $q$ , cuja derivada temporal  $dq/dt$  é a corrente elétrica  $i$ .

O sinal da força eletromotriz induzida nas espiras de um indutor tende a compensar a variação de corrente. Por exemplo, se a corrente é diminuída ( $di/dt < 0$ ), então a força eletromotriz induzida é positiva e tende a aumentar a corrente (uma espécie de inércia à variação de corrente). O resultado desse processo é que, quando um indutor é colocado em série com um capacitor, cria-se uma dinâmica restauradora de corrente que se assemelha à dinâmica do sistema massa-mola que se estuda nos cursos de mecânica<sup>1</sup>.

Para entender o que é e de onde vem o fenômeno de ressonância, iniciamos pela aplicação da segunda lei de Kirchhoff, ou lei das malhas, ao circuito RLC da Fig. 1:

$$V_R(t) + V_L(t) + V_C(t) = V(t) = V_m \cos(\omega t) \quad (1)$$

onde  $V_R(t)$ ,  $V_L(t)$  e  $V_C(t)$  são as tensões no resistor, no indutor e no capacitor, que variam a cada instante de tempo. A tensão aplicada, portanto, se distribui entre os

<sup>1</sup> Uma analogia entre o circuito RLC e o sistema massa-mola se constrói da seguinte forma: a indutância  $L$  é equivalente à massa  $m$ ; a capacitância  $C$  (na verdade o seu inverso) desempenha o papel da constante elástica  $k$  da mola;  $R$  desempenha o papel do atrito; e, finalmente, a corrente elétrica é equivalente à velocidade do objeto massivo ligado à mola.

três componentes de tal forma que a soma  $V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$  é sempre igual à tensão da fonte  $V(t)$ , qualquer que seja o instante de tempo considerado.

Inserindo, na equação acima, as tensões  $V_R$ ,  $V_L$  e  $V_C$  da Tabela 1, é possível chegar numa equação diferencial para a carga  $q$  do capacitor. Ao resolver essa equação, encontra-se a carga do capacitor em função do tempo,  $q(t)$ . Para encontrar a corrente  $i(t)$  que circula no circuito, basta então tomar a derivada temporal de  $q(t)$ .

O aluno interessado em se aprofundar, pode encontrar estes cálculos nas referências fornecidas. Para a realização deste experimento, podemos focar apenas no resultado da corrente, que é:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{V_m}{Z} \cos(\omega t - \phi), \quad (2)$$

onde

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (3)$$

é a chamada *impedância* do circuito (ver Seção 2.3 mais adiante) e

$$\phi = \cos^{-1}(R/Z). \quad (4)$$

É importante notar que, de acordo com a equação (2), a corrente no circuito oscila com a mesma frequência angular  $\omega$  que a fonte, apresentando apenas uma fase extra  $\phi$ . Por isso, diz-se que  $\phi$  é o *ângulo de defasagem* (ou simplesmente *defasagem*) entre a *fem* da fonte e a corrente no circuito, assumindo valores entre  $-\pi/2$  e  $\pi/2$ . Se  $\phi = 0$ , a tensão e a corrente atingem seus valores máximos sempre simultaneamente: elas estão *em fase*. Já, por exemplo, se  $\phi$  é positivo, a oscilação de tensão está adiantada em relação à oscilação de corrente.

### Ressonância no circuito RLC

A partir das equações (2) e (3), vemos que o valor máximo da corrente,  $i_m$ , depende da frequência angular  $\omega$ , já que  $i_m = V_m/Z$  e  $Z$  depende de  $\omega$ . A impedância atinge seu valor mínimo quando

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0, \quad \text{ou seja,} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \equiv \omega_0. \quad (5)$$

Isto significa que a *amplitude* das oscilações de corrente no circuito ( $i_m$ ) atinge o maior valor possível quando a fonte é posta a oscilar na frequência

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad (6)$$

conhecida como **frequência de ressonância** do circuito RLC.

Note que a frequência de ressonância **não** depende do valor da resistência  $R$ . Contudo, quanto maior a resistência, menor será o pico de corrente observado na frequência de ressonância, devido à maior dissipação de energia no resistor.

## 2.2 Tensão eficaz e corrente eficaz

Geralmente, os voltímetros e amperímetros medem tensão eficaz e corrente eficaz, ao invés da tensão máxima  $V_m$  e da corrente máxima  $i_m$ .

Conceitualmente, o *valor eficaz*  $i_{ef}$  de uma corrente alternada é o valor da corrente contínua necessária para dissipar a mesma quantidade de calor que a corrente alternada numa dada resistência ôhmica e num mesmo intervalo de tempo. Matematicamente, o valor eficaz é a raiz quadrada do *valor quadrático médio* da corrente, o que pode ser escrito da seguinte forma:

$$i_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt}, \quad (7)$$

onde  $T = 1/f = 2\pi/\omega$  é o período de oscilação da corrente alternada. Uma definição similar vale também para a tensão.

No caso de uma corrente cossenoidal, como a descrita pela equação (2), é fácil calcular a integral acima. O aluno que o fizer notará que o resultado depende apenas do valor máximo da corrente,  $i_m$ , o mesmo valendo para a tensão:

$$i_{ef} = \frac{i_m}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad V_{ef} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}. \quad (8)$$

**Nota importante.** Nas seções seguintes, utilizaremos a seguinte simplificação de notação, omitindo o subscrito *ef* dos valores eficazes:

$$i_{ef} \rightarrow i \quad V_{ef} \rightarrow V$$

## 2.3 Impedância, Reatância e Resistência

A partir da equação (2), vemos que o valor máximo  $i_m$  da corrente no circuito é proporcional ao valor máximo da tensão aplicada e vale  $i_m = V_m/Z$ , o que pode ser reescrito como

$$Z = \frac{V_m}{i_m}. \quad (9)$$

Veja que a expressão acima para a impedância  $Z$  assemelha-se à definição da resistência ( $R = V/i$ ). Por esta razão, dizemos que a impedância é uma espécie de generalização da resistência, especialmente útil quando tratamos de circuitos com corrente alternada contendo outros componentes além de resistores (neste caso, indutor e capacitor). Veja também que, na ausência do indutor e do capacitor ( $L \rightarrow 0$  e  $1/C \rightarrow 0$ ), a impedância é igual à resistência. A unidade SI para a impedância, assim como para a resistência, é o ohm ( $\Omega$ ).

Considerando a definição de impedância e as equações (8), tem-se que:

$$Z = \frac{V_m}{i_m} = \frac{V}{i}, \quad (10)$$

o que dá a **impedância do circuito em termos dos valores eficazes** efetivamente medidos pelo multímetro.

Além da impedância, a *reatância* também é uma grandeza importante no estudo dos circuitos de corrente alternada e é representada pelo símbolo  $X$ . Ela diz respeito à forma como um circuito ou um componente do circuito “reage” ao estímulo de uma tensão alternada, o que dependerá em geral da frequência angular  $\omega$  da tensão aplicada. O indutor, por exemplo, responde melhor para frequências mais altas, ao contrário do capacitor, que apresenta um tempo característico de carga que limita sua resposta para frequências demasiado altas. O resistor ideal não apresenta reatância, sendo indiferente à frequência do oscilador.

As reatâncias do indutor e do capacitor são assim definidas:

$$X_L = \omega L \quad \text{e} \quad X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad (11)$$

lembrando que  $\omega = 2\pi f$ .

Com estas definições, valem as seguintes relações entre as **tensões eficazes**  $V_R$ ,  $V_L$  e  $V_C$  de cada componente do circuito RLC e a **corrente eficaz**  $i$  (que é a mesma em todos os componentes já que estes estão ligados em série):

$$\boxed{V_R = Ri}, \quad \boxed{V_L = X_L i}, \quad \boxed{V_C = X_C i}. \quad (12)$$

Tal como a resistência e a impedância, a reatância também é medida em ohms.

## 2.4 Diagrama de fasores

As equações (12) nos mostram que tanto a resistência quanto a reatância são grandezas que ligam diretamente a tensão à corrente, sugerindo que a resistência e a reatância são facetas diferentes de uma mesma grandeza: a impedância!

De fato, podemos reescrever a impedância do circuito RLC (equação 3) de uma maneira mais compacta:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad (13)$$

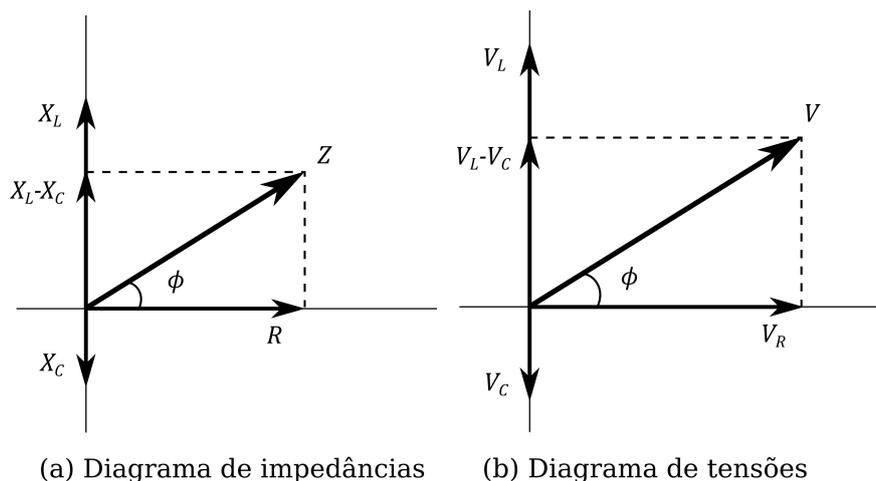
onde  $X = X_L - X_C$  é a reatância total do circuito. Note como a resistência e a reatância do circuito contribuem da mesma forma no cômputo da impedância.

Combinando a equação acima com as equações (12) e (10), também podemos escrever equação análoga para as tensões:

$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}. \quad (14)$$

As equações (13) e (14) corroboram uma maneira muito comum de representar graficamente tanto a impedância quanto a tensão num circuito: o *diagrama de fasores*, ilustrado na figura 2 e explicado a seguir.

Um *fasor* (ou vetor de fase) representa uma oscilação senoidal com amplitude, frequência e fase bem definidas. O módulo do fasor corresponde à amplitude e o ângulo do fasor corresponde à fase. Aqui, escolhemos a representação gráfica estática,



**Figura 2** Diagramas de fasores para (a) impedâncias e (b) tensões. O ângulo  $\phi$  é o mesmo nos dois diagramas e dá a fase relativa entre as oscilações de tensão e de corrente na saída da fonte. (a) Impedância total do circuito  $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ ; (b) Tensão da fonte  $V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}$ .

em que a frequência do fasor não é explicitada no gráfico, ficando apenas subentendido que, num mesmo gráfico, todos os fasores representam oscilações com a mesma frequência.

No diagrama de fasores de impedância, a resistência é um fasor representado por um vetor na direção horizontal apontando para a direita; a reatância indutiva é um fasor representado por um vetor na direção vertical apontando para cima; e a reatância capacitiva é um fasor representado por um vetor vertical para baixo. Os módulos destes vetores são medidos em ohms, em acordo com as grandezas que eles representam. A soma vetorial de  $X_L$  com  $X_C$  resulta num vetor que representa  $X$  e cujo módulo é  $|X_L - X_C|$ . A impedância  $Z$  do circuito é então representada pela soma vetorial de  $X$  e  $R$ , que resulta num vetor fazendo um ângulo  $\phi$  com o eixo horizontal. O módulo deste vetor é justamente aquele dado na equação (13), como se pode perceber utilizando o Teorema de Pitágoras para triângulos retângulos. O mesmo princípio pode ser utilizado para construir um diagrama de tensões, como na figura 2(b).

O ângulo  $\phi$  discutido aqui é rigorosamente o mesmo que aparece nas equações (2) e (4). Pelo diagrama de impedâncias, nota-se que ele pode também ser escrito como

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{X}{R} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{X_L - X_C}{R} \right). \quad (15)$$

Utiliza-se o ângulo  $\phi$  para classificar o circuito em três categorias:

- se  $\phi > 0$ , o circuito é *indutivo* e a tensão está *adiantada* em relação à corrente;
- Se  $\phi < 0$ , o circuito é *capacitivo* e a tensão está *atrasada* em relação à corrente;
- Se  $\phi = 0$ , o circuito é *resistivo* e a corrente e a tensão estão *em fase*.

O ângulo de defasagem  $\phi$ , embora seja um conceito que possa parecer um tanto abstrato, tem grande aplicação prática, relacionado à potência efetiva dissipada em circuitos RLC alimentados com corrente alternada. Enquanto, num circuito de cor-

rente contínua, a potência dissipada  $P$  é dada por  $P = V i$ , nos circuitos de corrente alternada, durante parte do ciclo, a energia é fornecida da fonte à componente reativa e, na parte restante do ciclo, uma porção da energia é devolvida da componente reativa à fonte. Assim, é possível mostrar que, durante o ciclo completo, a potência efetivamente dissipada pela componente resistiva do circuito é dada por:

$$P = V_R i = V i \cos \phi \quad (16)$$

onde a quantidade  $\cos \phi$  é denominada fator de potência do circuito, podendo variar de 0 ( $\phi = 90^\circ$  e circuito puramente reativo) a 1 ( $\phi = 0^\circ$  e circuito puramente resistivo).

As ferramentas apresentadas até aqui fornecem uma forma complementar de entender o fenômeno de ressonância. Como vimos, a ressonância surge no estudo do circuito RLC quando analisamos o comportamento da corrente como função da frequência de estímulo da fonte de tensão. Observa-se que, mantidos fixos os parâmetros  $R$ ,  $L$  e  $C$ , existe uma frequência de ressonância  $f_0$  para a qual a corrente no circuito é maximizada. Nesta condição, a corrente  $i$  é máxima porque a impedância  $Z$  tem valor mínimo, pois  $X_C = X_L$  e, portanto,  $\phi = 0$ .

Uma maneira de verificar experimentalmente estas condições é medir a corrente como função da frequência e observar, em ressonância, a proximidade entre  $V_L$  e  $V_C$ .

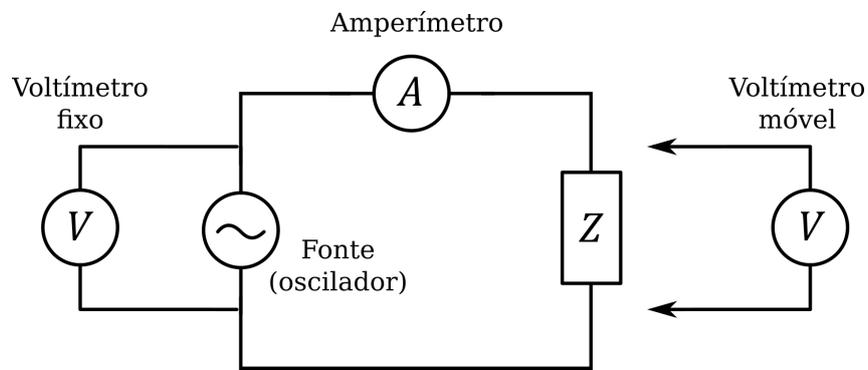
### 3 Referências Bibliográficas

- Halliday, Resnick & Walker, *Fundamentos de Física*, Vol. 3, Ed. LTC
- Moysés Nussenzveig, *Curso de Física Básica*, Vol. 3, Ed. Blucher
- Piacentini, Grandi, Hofmann, de Lima & Zimmerman, *Introdução ao Laboratório de Física*, Ed. da UFSC.
- Helene & Vanin, *Tratamento estatístico de dados em física experimental*, Ed. Blucher

## 4 Relação do material

- 01 fonte AC (oscilador);
- 03 multímetros;
- 01 resistor metálico  $100\ \Omega$ ;
- 01 bobina 1500 espiras e  $L = 56\ \text{mH}$ ;
- 01 capacitor  $0,68\ \mu\text{F}$  ( $\pm 10\%$ );
- 09 cabos para conexões elétricas.

## 5 Esquema Experimental



**Figura 3** Esquema de montagem

## 6 Procedimento Experimental

### PRIMEIRA PARTE - Circuitos

1. Monte o circuito conforme o esquema, utilizando como  $Z$  a resistência  $R$ .
2. Use a frequência de 1.000 Hz e amplitude máxima da fonte. Antes de ligar a fonte de tensão, se tiver dúvidas, solicite ao professor para verificar as conexões.
3. O objetivo é fazer 7 diferentes circuitos, onde  $Z$  será sucessivamente substituído por  $R$ ,  $L$  e  $C$ , individualmente, e por  $RC$ ,  $RL$ ,  $LC$  e  $RLC$ , em série. Em cada um deles, você deverá medir a tensão total  $V$ , a corrente total  $i$  e as tensões  $V_R$ ,  $V_L$  e  $V_C$  nos terminais de cada elemento do circuito ( $R$ ,  $L$  e  $C$ ). Ao completar as medidas de um dado circuito e antes de montar o seguinte, retorne a amplitude a zero. Anote suas medidas na Tabela I do relatório.
4. A partir dos dados da Tabela I, faça os cálculos necessários para preencher a Tabela II.

### SEGUNDA PARTE - Ressonância

1. Nesta parte, monte o circuito LC. Utilize o amperímetro na mesma escala no decorrer das medidas. **Observação:** *mesmo sem resistor montado, a resistência da própria bobina combinada à resistência interna do amperímetro conferem ao circuito uma resistência total  $R$ . Ou seja, o circuito LC funciona, na verdade, como um RLC com resistência baixa.*
2. Ajuste a frequência do oscilador para 400 Hz e sua amplitude para 1,50 V (no voltímetro). Meça a corrente no circuito e as tensões no capacitor e no indutor, anotando os resultados na Tabela III. Repita as medidas para cada frequência lançada na tabela, verificando sempre que a amplitude está em 1,50 V.
3. Determine empiricamente a frequência de ressonância do circuito, ajustando a frequência da fonte até atingir a corrente máxima. *Não esqueça de manter a tensão na fonte em 1,50 V.*
4. Meça a corrente e as tensões no capacitor e no indutor, na condição de ressonância e também para uma condição fora da ressonância, isto é, para uma frequência arbitrariamente alta, acima dos valores fixados na Tabela III. Os resultados serão anotados nas colunas extra à direita da tabela.

## 7 Questionário

1. (a) A partir dos resultados da Tabela II para  $R$ ,  $L$  e  $C$  nos diferentes circuitos, calcule os valores médios e respectivos desvios-padrão de  $R$ ,  $L$  e  $C$ .  
(b) Estes valores experimentais são compatíveis com os valores fornecidos pelo fabricante?
2. Um indutor *ideal* é dotado apenas de indutância. Já um indutor *real*, apresenta também uma pequena resistência devida ao próprio fio de cobre de que é feita a bobina.  
(a) A partir das medidas do circuito L ( $V_L$  e  $i$ ), e considerando desta vez a resistência ôhmica da bobina ( $r_b = 14 \Omega$ ), recalcule sua indutância.  
(b) O resultado difere significativamente daquele da Tabela II?
3. (a) Faça o diagrama de tensões (em escala) a partir das medidas no circuito RLC e determine o ângulo de defasagem  $\phi$  entre a tensão da fonte e a corrente.  
(b) Conclui-se que o circuito era indutivo ou capacitivo? Por quê?
4. (a) Calcule a frequência de ressonância teórica para este circuito RLC usando os valores obtidos no item a da questão 1.  
(b) Fixando o valor de  $L$ , para que valor de  $C$  este circuito entraria em ressonância com a frequência da rede elétrica (60 Hz)?
5. (a) Construa o gráfico de  $i$  em função de  $f$  com os dados da Tabela III, incluindo a frequência de ressonância. A frequência de ressonância obtida é compatível com a prevista em teoria?  
(b) Calcule a impedância do circuito na ressonância, utilizando a tensão total aplicada e a corrente medida.  
(c) Da resposta ao item anterior, extraia o valor da resistência interna do amperímetro.
6. (a) Construa, num só sistema de eixos, os gráficos de  $V_L$  e  $V_C$  em função da frequência  $f$  da fonte.  
(b) Na questão 3, classificamos o circuito em indutivo ou capacitivo para uma frequência de alimentação de 1000 Hz. Baseando-se nos gráficos do item anterior, descreva como esta classificação se modifica conforme é variada a frequência.

